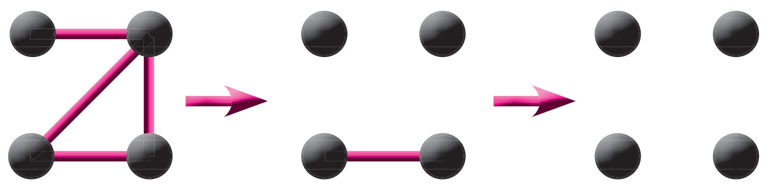
محمود داورزنی
دبیر ریاضی شهری و دانشجوی دکتری ریاضی

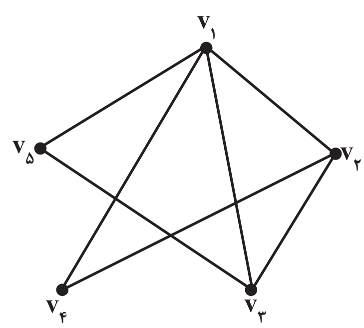


دنبالهٔ گرافیک و الگوریتم هاول- حکیمی

اشاره

دنباله‌ای نزولی از اعداد حسابی که جملات آن درجه‌های رئوس یک گراف باشند، دنبالهٔ گرافیک نامیده می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم به بررسی روش‌های تشخیص گرافیک بودن یک دنبالهٔ عددی بپردازیم.

هر گراف ساده تعدادی رأس (p) و تعدادی یال (q) دارد. مثلاً در گراف زیر، p=۵ و q=۶.

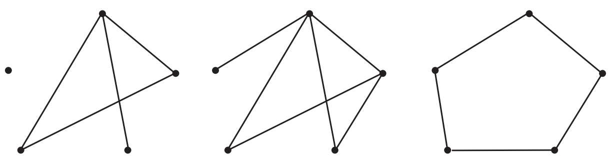


شکل ۱

و می‌دانیم که تعداد یال‌های متصل به یک رأس مانند v_i، درجهٔ آن نامیده می‌شود و با $deg(v_i)$ نشان داده می‌شود. مثلاً در گراف بالا،

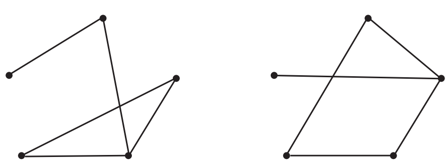
$$deg(v_1)=۴,\ deg(v_2)=deg(v_3)=۳,\ deg(v_4)=deg(v_5)=۲$$

بنابراین درجه‌های رأس‌های این گراف، یک دنبالهٔ نزولی به‌صورت: ۴,۳,۳,۲,۲ تشکیل می‌دهند که به اصطلاح، «دنبالهٔ درجات» نامیده می‌شـود. واضح اسـت که برای هر گراف می‌توان یک دنبالهٔ درجه‌ها نوشت. به مثال‌های زیر توجه کنید.



شکل۲

البته ممکن اسـت دو گراف متفـاوت[1] دارای یک دنبالهٔ درجه‌ها باشند. مثلاً گراف‌های زیر هر دو دنبالهٔ درجه‌ای به‌صورت: ۳,۲,۲,۲,۱ دارند، ولی با یکدیگر متفاوت‌اند. (گراف سـمت راست، دور به طول ۴ دارد، در حالی‌که گراف دیگر دارای دور به طول ۳ است.)



شکل ۳

p و q از یک دنبالهٔ درجه‌ها به راحتی مشخص می‌شوند. مثلاً در

دنبالهٔ درجه‌های ۴،۳،۳،۲،۲ تعداد اعداد به‌کار رفته، همان p اســت و به کمک قضیهٔ $\sum \deg(v_i) = ۲q$ ، مقدار q نیز مشخص می‌شود. در این دنباله داریم: $p = ۵$ و $q = \frac{۱۴}{۲} = ۷$.

گرچه هر گرافی یک دنبالهٔ درجه‌ها دارد، ولی هر دنباله‌ای از اعداد صحیح نامنفی، لزوماً درجات یک گراف نیست. مثلاً دنبالهٔ ۴،۳،۲،۱،۰ مربوط به یک گراف نیست. آیا می‌توانید دلیل این امر را توضیح دهید؟

یکی از جواب‌ها این است که با وجود عدد ۴، یعنی رأسی داریم که با چهار رأس دیگر مجاور است. پس درجهٔ ۴ رأس دیگر باید حداقل ۱ باشد، در حالی‌که در این دنباله، عدد صفر وجود دارد. پس این دنباله مربوط به گراف نیســت. به‌عنوان یک مثال دیگر، دنبالهٔ ۵،۴،۳،۲،۲،۱ نیز مربوط به درجات یک گراف نیســت، زیرا تعداد اعداد فرد در این دنباله، یک عدد فرد است[۲].

◀ **تعریف دنبالهٔ گرافیک:** دنبالــهٔ $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ از اعداد صحیح نامنفــی را دنبالهٔ گرافیک می‌گوییم، هــرگاه دنبالهٔ درجه‌های یک گراف ساده باشد.

بــا توجه به تعریــف و مثال‌های بــالا، دنباله‌هــای ۴،۳،۲،۱،۰ و همین‌طور ۵،۴،۳،۲،۲،۱ گرافیک نیستند. تشخیص اینکه کدام دنباله‌ها گرافیکی هســتند، به‌طور معمول با بررسی خواصی که باید این اعداد به‌عنوان درجات داشــته باشند، انجام می‌شــود. اگر $d=(d_1,d_2,...,d_n)$ به‌عنوان یک دنباله از اعداد صحیح نامنفی داده شــده باشد و بخواهد درجات یک گراف ساده باشد، باید:

۱. داشته باشیم: $d_i \le p-۱$.
۲. حداقل دو عدد مساوی در دنباله موجود باشد.
۳. تعداد اعداد فرد، فرد باشد.
۴. اگر k عضو دنباله برابر با p-۱ باشد، آنگاه: $d_n \ge k$.

لازم به ذکر است که بعضی از خواص بالا هم‌ارز یکدیگرند.

● **مثال:** آیا دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۳،۱) گرافیک است؟

◆ **حل:** در این دنباله، p=۷ و دو مقدار برابر با p-۱=۶ هســتند. پس باید: $d_n \ge ۲$، در حالی‌که $d_n = ۱$. پس این دنباله گرافیک نیست.

ســؤالی که ممکن است برای شما پیش آمده باشد، این است که: آیا شــرطی لازم و کافی برای اثبات گرافیــک بودن یک دنباله وجود دارد یا خیر؟

جواب مثبت اســت و چند قضیهٔ دوشــرطی بــرای اثبات این امر وجود دارد. اولین قضیه در ســال ۱۹۶۰، توســط دو ریاضی‌دان بزرگ اثبات شده است.

◀ **قضیــهٔ ۱ (اردوش[۳] ـ گالای):** دنبالهٔ نزولی $(d_1,d_2,...,d_n)$ از اعداد صحیح نامنفی، گرافیک است، هرگاه مجموع تمام این اعداد زوج باشد و برای هر $۱ \le k \le n$:

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i \le k(k-۱) + \sum_{i=k+۱}^{n} \min\{k, d_i\}. \quad (*)$$

هاول ریاضی‌دان اهل چک و سیف‌الله لوئیس حکیمی ریاضی‌دان ایرانی ـ آمریکایی زادهٔ ایران، این الگوریتم را بنیان نهادند.

● **مثال ۴.** به کمک قضیهٔ بالا، گرافیک بودن دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۱،۱) را بررســی می‌کنیم. در گام نخست، مجموع این اعداد زوج است و در گام بعد، شرط (*) را برای مقادیر متفاوت k بررسی می‌کنیم.

$k=۱ \Rightarrow ۶ \le ۱(۱-۱)+(۱+۱+۱+۱+۱+۱)=۶$

$k=۲ \Rightarrow ۶+۶ \le ۲(۲-۱)+(۲+۲+۲+۱+۱)=۱۰$

با توجه به عدم برقراری نامساوی آخر برای k=۲، دنبالهٔ داده شده گرافیک نیست. قضیهٔ بعدی که مشهور به «الگوریتم هاول ـ حکیمی»[۴] است، ساده‌تر از قضیهٔ ۱ عمل می‌کند.

◀ **قضیــهٔ ۲ (هــاول ـ حکیمــی):** دنبالــهٔ $(d_1,d_2,...,d_n)$ که $d_1=k$ از اعــداد صحیــح نامنفی، گرافیک اســت اگــر و تنها اگــر دنبالهٔ $(d_2-۱,d_3-۱,...,d_{k+1}-۱,d_{k+2},...,d_n)$ گرافیک باشد.

طبق الگوریتم بالا، کافی است عدد بزرگ‌تر را از دنباله حذف کنیم و به همان اندازه از اعداد بعد از آن، یک واحد کم کنیم. اکنون گرافیک بودن دنبالهٔ اولیه منوط به گرافیک بودن این دنباله اســت. چیزی که این قضیه را ساده‌تر از قضیهٔ قبل می‌کند، این است که اگر تشخیص گرافیک بودن دنبالهٔ به‌دســت آمده مشکل باشد، باز هم می‌توان این کار را ادامه داد. قبل از اجرای مجدد الگوریتم روی دنبالهٔ به‌دست آمده باید آن دنباله را نزولی کنیم.

● **مثــال:** به کمــک الگوریتم هاول ـ حکیمــی، گرافیک‌بودن دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۱،۱) را بررسی می‌کنیم. با یک‌بار اجرای این الگوریتم داریم:

$(\underline{۶},۶,۵,۴,۳,۱,۱) \longrightarrow (۵,۴,۳,۲,۰,۰)$

دنبالهٔ به‌دســت آمده گرافیک نیســت. (به‌خاطر وجود یک مقدار p-۱، کمترین درجه باید حداقل ۱ باشد). اگر باز هم تشخیص گرافیک بودن این دنباله مشکل باشد، می‌توانیم یک‌بار دیگر الگوریتم را استفاده کنیم:

$(\underline{۵},۴,۳,۲,۰,۰) \longrightarrow (۳,۲,۱,-۱,-۱)$

اکنون به‌خاطر وجود مقادیر ۱-، این دنباله گرافیک نیســت و در نتیجه دنباله‌های قبل نیز گرافیک نیستند.

● **مثال:** به کمک این الگوریتم، گرافیک بودن دنبالهٔ (۶،۶،۵،۴،۳،۳،۳) را بررسی می‌کنیم.

$(\underline{۶},۶,۵,۴,۳,۳,۳) \longrightarrow (\underline{۵},۴,۳,۲,۲,۲) \longrightarrow (\underline{۳},۲,۱,۱,۱) \longrightarrow (۱,۰,۰,۱)$

دنبالهٔ اخیر گرافیک اســت، زیرا به راحتی می‌توان گراف نظیر را رسم کرد.

شکل ۴

پس تمام دنباله‌های قبل نیز گرافیک هستند.

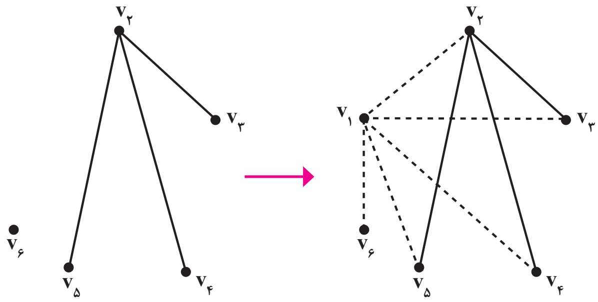
یکی دیگر از کاربردهای الگوریتم هاول ـ حکیمی، رسم یک گراف از روی دنبالهٔ درجات آن است. برای این کار، ابتدا الگوریتم را تا جایی روی دنبالهٔ داده شــده اجرا می‌کنیم که بتوانیــم گراف متناظر آن را رسم کنیم. اکنون با مشاهدهٔ دنبالهٔ قبل و اینکه چه عددی حذف شده اســت، یک رأس به گراف رسم شده اضافه می‌کنیم و به تمام رئوسی که از آن‌ها یک واحد کم شــده است، یک یال متصل می‌کنیم. با این کار، گراف متناظر دنبالهٔ قبل نیز رســم می‌شود. با تکرار این کار تمام گراف‌ها رسم می‌شوند.

● **مثال:** گــراف متناظر با دنبالــهٔ گرافیک (۵,۴,۲,۲,۲,۱) را رســم می‌کنیم.

با یک‌بار اجرای الگوریتم خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6 & & v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6 \\ (۵,۴,۲,۲,۲,۱) & \longrightarrow & (۳,۱,۱,۱,۰) \end{matrix}$$

گراف مربوط به آخرین دنباله را رسم می‌کنیم و سپس یک رأس به این گراف می‌افزاییم و به تمام رئوس دیگر متصل می‌کنیم (یال‌های نقطه‌چین):



شکل ۵

گراف به‌دست آمده، همان گراف مربوط به دنبالهٔ (۵,۴,۲,۲,۲,۱) است.

البته دقت داشــته باشــید که ممکن اســت گراف دیگری نیز با این دنبالهٔ درجه‌ها موجود باشــد. به‌عنوان تمرینی برای این مباحث، گرافیک بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید و در صورت مثبت بودن جواب، گراف نظیر آن‌ها را نیز رسم کنید.

الف) (۵,۵,۵,۴,۲,۱,۱,۱)
ب) (۵,۵,۴,۴,۲,۲,۱,۱)
ج) (۵,۵,۵,۳,۲,۲,۱,۱)
د) (۵,۵,۴,۳,۲,۲,۲,۲,۱)
هـ) (۶,۶,۵,۴,۳,۳,۱)
و) (۷,۶,۵,۴,۳,۳,۲)

پی‌نوشت‌ها

۱. دو گــراف متفاوت‌انــد، هرگاه یکریخت نباشــند. گراف‌های $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را یکریخت می‌گوییم هرگاه تابع دوســویی $f:V_1\rightarrow V_2$ موجود باشــد؛ به‌طوری‌که: $\{a,b\}\in E_1 \Leftrightarrow \{f(a),f(b)\}\in E_2$. مثلاً گراف‌های  و  یکریخت هستند. دو گراف یکریخت خصوصیات یکسانی دارند؛ یعنی از نظر دنبالهٔ درجه، تعداد دورها، مسیرها و غیره یکسان هستند.

۲. از قضیهٔ $\sum \deg(v_i) = ۲q$، می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف، همیشه یک عدد زوج است و به‌عنوان یک نتیجه، تعداد اعداد فرد باید همواره زوج باشد و همین‌طور می‌توان نشان داد که تعداد اعداد زوج یک دنباله، از لحاظ زوجیت با p یکسان است.

۳. **پال اردوش**، ریاضی‌دان اهل مجارستان در سال ۱۹۱۳ به‌دنیا آمد. نشانه‌های نبوغ از کودکی در او مشخص بود. اولین مقالهٔ خود را در ریاضی در سن ۱۸ سالگی نوشــت و تا پایان عمر حدود ۱۵۰۰ مقاله و کتاب به رشــتهٔ تحریر درآورد و از این حیث، در تاریخ ریاضی بی‌همتاســت. وی در ســال ۱۹۹۶ و در سن ۸۳ سالگی درگذشت.

اردوش قصد نوشتن کتابی با نام «اثبات» را داشت که در آن هر قضیه به زیباترین وجه اثبات می‌شود، چرا که معتقد بود، اثبات تمام قضایا به بهترین شکل در لوحی نزد پروردگار موجود است. به اصرار دانشجویان شروع به نوشتن چنین کتابی کرد، ولی مرگ به او مجال اتمام آن‌را نداد. دو تن از شاگردانش از ایده‌ها و نظرات او کتابی با همین نام نوشتند و به روح او تقدیم کردند. این کتاب با نام «کتاب اثبات» توسط پژوهشگاه دانش‌های بنیادی و با ترجمهٔ آقای **سیامک کاظمی** منتشر شده است و شما می‌توانید از اثبات‌های بی‌نظیر آن لذت ببرید.

۴. **هاول** ریاضی‌دانی اهل چک است و سیفا... لوئیس حکیمی نیز ریاضی‌دان ایرانی ـ امریکایی است که در ایران به‌دنیا آمده است. هاول در سال ۱۹۵۵ و حکیمی در سال ۱۹۶۲ این الگوریتم را بنیان نهادند.

منابع

۱. علیپور، علیرضا. **ترکیبیات**، انتشارات فاطمی، چاپ ششم.
۲. ایگنر، مارتین و تسیگلر، گونتر، **کتاب اثبات**، ترجمه سیامک کاظمی، انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی.
3. Bondy, J. A. Murty U.S.R., *Graph Theory, Springer publishing*, 2008.
4. Hakimi S. L. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph. I", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **10**: 496-506, MR 0148049